

# Cichoń's maximum の左側の分離

## Mathematical Logic Advent Calendar Advent Calendar 2024

### day 17

天下のパクリ屋たか

2024年12月17日

## アブストラクト

Cantor は実数の濃度は自然数の濃度よりも真に大きいことを示した。これにより、「実数の濃度は自然数の次に来る濃度」であるか? という疑問が浮かび上がる。連続体仮説 (CH) とは「実数の濃度は自然数の次に来る濃度」が成立するという主張である。Godöl の構成可能宇宙は ZFC+CH のモデルであり、強制法により ZFC+¬CH のモデルが構成できる。このことから、ZF から CH と ¬CH はいずれも証明できないことが分かる。

基数不変量とは最小の不可算濃度  $\aleph_1$  と連続体濃度  $c = |\mathbb{R}|$  の間の基数 (濃度) のことである。なかでも基本的な 10 個として、下図式のような関係が ZFC 上で知られている: この図式において、「 $\rightarrow$ 」は「 $\leq$ 」のこと

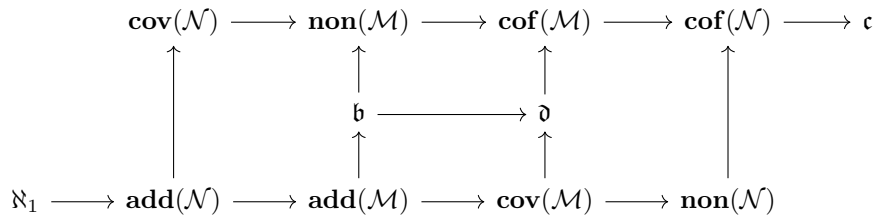


図 1 Cichoń's diagram

である。特に、ZFC 上で  $\mathbf{add}(\mathcal{M}) = \mathbf{b} \cap \mathbf{non}(\mathcal{M})$  および  $\mathbf{cof}(\mathcal{M}) = \mathbf{d} \cup \mathbf{cov}(\mathcal{M})$  が成立している。

さらに図式に現れる任意の基数不変量  $\mathfrak{r}$  (ただし、 $\aleph_1$  と  $\mathbf{c}$  を除く) に対して、 $\aleph_1 < \mathfrak{r} < \mathbf{c}$  を満たすモデルが存在する。またより強く、図式に現れる  $\mathbf{cov}(\mathcal{M})$  と  $\mathbf{non}(\mathcal{M})$  を除いた 10 個の基数を同時に異なる値にする ZFC のモデルが存在する (Cichoń's maximum)。

本稿では、Cichoń's maximum の証明の一端を担う *book-keeping argument* と *goodness property* について紹介する。

## 目次

II	cardinal invariants と relational systems	2
III	強制法	5
IV	Book-keeping Argument	6
V	Goodness Property	8
VI	Cichoń's diagram の左側の分離	8
VII	あとがき	10
	参考文献	10

## I 記法

ここではいくつか集合論で用いる記法を導入する.

### Definition I.1.

1. 集合  $\alpha$  が順序数であるとは, 次の 2 条件を満たすことである.
  - 1-a.  $\in$  に関して整列集合である,
  - 1-b.  $\in$  に関して推移的である. つまり,  $\forall \beta \in \alpha \forall \gamma \in \beta \gamma \in \alpha$  を満たす, 特に, 等号を許す場合,  $\leq$  を関係として用いる. 空集合や次に紹介する  $\omega$  は順序数の例である.
2.  $\text{ON}$  は順序数からなる集まりであり,  $\in$  に関して整列している. つまり 任意の空でない部分集合  $A \subseteq \text{ON}$  に対して最小値が存在する. 特にこの最小値は  $\cap A$  によって表現可能である.
3.  $\omega$  は自然数からなる集まりであり, 帰属関係  $\in$  に関して整列集合である. 有限順序数  $n \in \omega$  に対して,  $\omega \setminus n$  は  $n$  以上の有限順序数からなる集まりである.
4. 基数は順序数  $\alpha$  のなかでも, 自身より小さい順序数  $\beta \in \alpha$  から  $\alpha$  への全射が存在しないものである,
5. 集合  $X$  と基数  $\kappa$  に対して  $[X]^\kappa$  は  $X$  の部分集合  $Y \subseteq X$  のなかでも 濃度が  $\kappa$  であるものの集まりである, また,  $[X]^{<\kappa}$  は部分集合の内サイズが  $\kappa$  未満の集まりである,
6. 順序数  $\alpha$  に対して定まる  $\text{cf}(\alpha)$  は基数であり,  $\cup A = \alpha$  を満たす部分集合  $A \subseteq \alpha$  の中で最小のサイズである, 特に  $\forall \beta \in \alpha \exists \gamma \in A \beta \in \gamma$  が成立する,
7. 2 つの  $X, Y$  に対して,  $X^Y$  は  $Y$  から  $X$  への関数全体からなる集合である,
8. 2 つの関数  $f, g \in \omega^\omega$  に対して, 関係  $f \leq^* g$  は  $\exists n \in \omega \forall m \in \omega \setminus n f(m) \leq g(m)$  である.

## II cardinal invariants と relational systems

基数からなる集まり,  $\text{Card}$ , は真のクラスであり, 帰属関係  $\in$  に関して整列されている. 特に, 基数の文脈では「 $\in$ 」の代わりに「 $<$ 」が用いられ, 等号も許す際は「 $\leq$ 」と記す. これを踏まえると次のような集まりに対して基数を定めることが出来る.

$$\mathfrak{r} = \cap \{ \kappa \in \text{Card} ; \exists \mathcal{F} \in [N]^\kappa \cup \mathcal{F} = \mathbb{R} \}$$

ここで,  $\mathcal{N}$  は実数上で定義される通常のルベーク零集合からなる集まりであり,  $[\mathcal{N}]^\kappa$  は濃度が  $\kappa$  である部分集合  $A \subseteq \mathcal{N}$  からなる集まりである.

このとき, 次のような性質が成り立っている:

1.  $\cup \mathcal{F} \neq \mathbb{R}$  がすべての可算集合  $\mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{\aleph_0}$  に対して成立.
2.  $\cup \mathcal{F} = \mathbb{R}$  は  $\mathcal{F}$  が任意の一点集合を含む場合成立する.

このことより, 上で定義した基数  $\mathfrak{r}$  は  $\aleph_1 \leq \mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$  が ZFC 上で定義される. とくにこのようにして定義した基数はルベーク零集合の covering number と呼び,  $\mathbf{cov}(\mathcal{N})$  と書く.

同様にして,  $\mathcal{N}$  にまつわる基数不変量 3 つが定義される:

1. Additivity number  
 $\mathbf{add}(\mathcal{N}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \forall \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^\kappa \cup \mathcal{F} \in \mathcal{N} \}$
2. Uniformity number  
 $\mathbf{non}(\mathcal{N}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists A \in [\mathbb{R}]^\kappa A \notin \mathcal{N} \}$
3. Cofinality number  
 $\mathbf{cof}(\mathcal{N}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{B} \in [\mathcal{N}]^\kappa \forall X \in \mathcal{N} \exists Y \in \mathcal{B} X \subseteq Y \}$

同様にして, **Cichoń's diagram** に登場する他の基数も定義される:

1. Additivity number for meager  
 $\mathbf{add}(\mathcal{M}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \forall \mathcal{F} \in [\mathcal{M}]^\kappa \cup \mathcal{F} \in \mathcal{M} \}$
2. Uniformity number for meager  
 $\mathbf{non}(\mathcal{M}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists A \in [\mathbb{R}]^\kappa A \notin \mathcal{M} \}$
3. Covering number for meager  
 $\mathbf{cov}(\mathcal{M}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^\kappa \cup \mathcal{F} = \mathbb{R} \}$
4. Cofinality number for meager  
 $\mathbf{cof}(\mathcal{M}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{B} \in [\mathcal{M}]^\kappa \forall X \in \mathcal{M} \exists Y \in \mathcal{B} X \subseteq Y \}$
5. unbounded number (for  $\omega^\omega$ )  
 $\mathfrak{b} = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{F} \in [\omega^\omega]^\kappa \forall y \in \omega^\omega \exists x \in \mathcal{F} \neg x \leq^* y \}$
6. Dominating number (for  $\omega^\omega$ )  
 $\mathfrak{d} = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{F} \in [\omega^\omega]^\kappa \forall x \in \omega^\omega \exists \mathcal{F} x \leq^* y \}$

ここで,  $\mathcal{M}$  は瘦せ集合からなる集まり, つまり 疎集合の可算和集合からなる集まりである.

**Definition II.1.** 2 つの集合  $X, Y$  と関係  $\sqsubset$  から為す 3 つ組  $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$  を relational system と呼ぶ.<sup>i</sup>

このとき, 次のような基数が定義可能である.

1.  $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists A \in [X]^\kappa \forall y \in Y \exists x \in A \neg x \sqsubset y \},$
2.  $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \cap \{ \kappa \in \text{Card}; \exists \mathcal{B} \in [Y]^\kappa \forall x \in X \exists y \in \mathcal{B} x \sqsubset y \}.$

2 つの relational systems  $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$  と  $\mathbf{S} = \langle A, B, \triangleleft \rangle$  に対して, 関係  $\mathbf{R} \leq_T \mathbf{S}$  を次のように定義する:

<sup>i</sup> 関係  $\sqsubset$  は基本的に  $X$  と  $Y$  の間の関係と考えるが,  $\in$  や  $\subseteq$  を扱う際に,  $\in |_{X \times Y}$  や  $\subseteq_{X \times Y}$  のように書くのが億劫であるので, このように定義している.

- 2つの函数  $\varphi: X \rightarrow A$  と  $\psi: B \rightarrow Y$  が存在して次が成立する:

$$\forall x \in X \forall b \in B \varphi(x) \triangleleft b \implies x \sqsubset \psi(b)$$

関係  $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{S}$  が成立するとき,  $\mathbf{R}$  から  $\mathbf{S}$  への Tukey connection が存在するといひ, 両向きが成立するとき, 2つは Tukey equivalent と呼び  $\mathbf{R} \cong_T \mathbf{S}$  とかく.

**Theorem II.2.** 2つの relational systems  $\mathbf{R}, \mathbf{S}$  について,  $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{S}$  ならば次が成立する:

- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) \geq \mathfrak{b}(\mathbf{S})$ ,
- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{S})$ .

とくに, 両向きが成立するときは, それぞれが等しくなる.

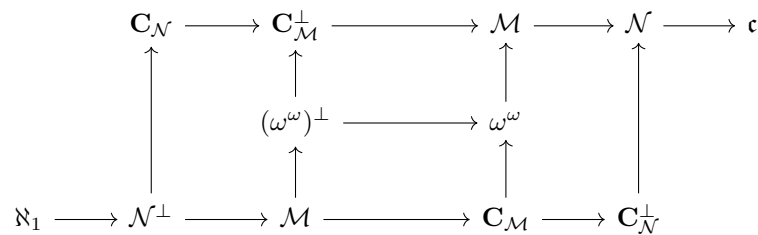
**Definition II.3.** Relational system  $\mathbf{R} = \langle A, B, \sqsubset \rangle$  に対して, その双対, dual relational system,  $\mathbf{R}^\perp = \langle B, A, \sqsubset^\perp \rangle$  が定義される. ここで, 関係  $\sqsubset^\perp$  は  $\langle a, b \rangle \in \sqsubset^\perp$  iff  $\neg \langle y, x \rangle \in \sqsubset$  で与えられる.

特に,  $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{S}$  ならば  $\mathbf{S}^\perp \preceq_T \mathbf{R}^\perp$  が成立する.

**Fact II.4.** Cichoń's diagram に現れる 8つの基数不変量は以下の 4つの relational systems から表現可能である:

1.  $\omega^\omega = \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \leq^* \rangle$ 
  - 1-a.  $\mathfrak{b}(\omega^\omega) = \mathfrak{b}$ ,
  - 1-b.  $\mathfrak{d}(\omega^\omega) = \mathfrak{d}$ ,
2.  $\mathcal{N} = \langle \mathcal{N}, \mathcal{N}, \subseteq \rangle$ ,
  - 2-a.  $\mathfrak{b}(\mathcal{N}) = \mathfrak{non}(\mathcal{N})$ ,
  - 2-b.  $\mathfrak{d}(\mathcal{N}) = \mathfrak{cov}(\mathcal{N})$ .
3.  $\mathbf{C}_{\mathcal{N}} = \langle \mathbb{R}, \mathcal{N}, \in \rangle$ ,
  - 3-a.  $\mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) = \mathfrak{non}(\mathcal{N})$ ,
  - 3-b.  $\mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) = \mathfrak{cov}(\mathcal{N})$ .
4.  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}, \mathcal{M}, \subseteq \rangle$ ,
  - 4-a.  $\mathfrak{b}(\mathcal{M}) = \mathfrak{non}(\mathcal{M})$ ,
  - 4-b.  $\mathfrak{d}(\mathcal{M}) = \mathfrak{cov}(\mathcal{M})$ .
5.  $\mathbf{C}_{\mathcal{M}} = \langle \mathbb{R}, \mathcal{M}, \in \rangle$ ,
  - 5-a.  $\mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) = \mathfrak{non}(\mathcal{M})$ ,
  - 5-b.  $\mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) = \mathfrak{cov}(\mathcal{M})$ .

**Theorem II.5.** Cichoń's diagram のおける大小関係はすべて, Tukey connection により決定される:



ここで、「 $\rightarrow$ 」は「 $\preceq_T$ 」である。

強制法/goodness の議論をするうえで 良い relational system である必要がある。そこで次を定義する：

**Definition II.6.** 次のような性質を持つ relational system を Prs とよぶ：

1.  $X$  は完全ポーランド空間、
2.  $Y$  はあるポーランド空間  $Z$  の空でない解析的集合である、
3. 次を満たす  $\subseteq$ -可算上昇列  $\langle \sqsubset_n \subseteq X \times Z; n \in \omega \rangle$  が存在する：
  - (a) 各  $n \in \omega$  に対して  $\sqsubset_n$  は閉集合である。
  - (b) 各  $n \in \omega$  と  $y \in Y$  に対して、 $\sqsubset_n^y = \{x \in X; x \sqsubset_n y\}$  は閉な疎集合である。

特に、Cichoń's diagram に現れる基数を表現する Prs は存在し次のような関係になっている。ここでは、具体的な定義は割愛する。

1.  $\mathbf{Lc}^* = \langle \omega^\omega, \mathcal{S}(\omega, \mathcal{H}), \in^* \rangle$  は Prs で次を満たす。
  - $\mathbf{Lc}^* \cong_T \mathcal{N}$ ,
2.  $\mathbf{Cn} = \langle \Omega, 2^\omega, \sqsubset_{\mathbf{Cn}} \rangle$  は Prs で次を満たす。
  - (a)  $\mathbf{Cn} \cong_T \mathbf{C}_{\mathcal{N}}^\perp$ ,
3.  $\omega^\omega = \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \leq^* \rangle$ .
4.  $\mathbf{Mg} = \langle 2^\omega, \exists, \in \rangle$  は Prs で次を満たす。
  - (a)  $\mathbf{Mg} \cong_T \mathbf{C}_{\mathcal{M}}$

これらの Prs を用いることで、[Theorem II.5](#) を次のように書き換えることが可能である。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{d}(\mathbf{R}_2) & \longrightarrow & \mathfrak{b}(\mathbf{R}_4) & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \mathfrak{d}(\mathbf{R}_1) \longrightarrow c \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathfrak{b}(\mathbf{R}_3) & \longrightarrow & \mathfrak{d}(\mathbf{R}_3) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \mathfrak{b}(\mathbf{R}_1) & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \mathfrak{d}(\mathbf{R}_4) \longrightarrow \mathfrak{b}(\mathbf{R}_2)
 \end{array}$$

Cichoń's diagram の左側の分離は強制法を用いることで実現する。具体的には、relational system  $\mathbf{R}$  と 正則基数  $\lambda$  に対して、次の2つを満たす長さ  $\nu$  の FS-反復強制半順序  $\mathbb{P}$  を構成する：

1.  $\Vdash \mathbf{C}_{[\nu]^{<\lambda}} \preceq_T \mathbf{R}$ ,
2.  $\Vdash \mathbf{R} \preceq_T \mathbf{C}_{[\nu]^{<\lambda}}$ .

1つ目を実現するためには goodness property を 2つ目の実現するために book-keeping argument という方法を取る。

### III 強制法

強制法はモデルを構成する手段として、非常にメジャーな方法である。本節では具体的な定義は割愛し、どのような理論であるかの概要を述べる。具体的な定義については [\[Kun11\]](#) などを参考にするとよい。

強制法は 1983 年に Cohen によって  $ZFC + \neg CH$  のモデルを構成するために導入された。強制法は適当な  $ZFC$  のモデル  $V^{\text{ii}}$  から始まり、強制半順序 (強制概念)  $\mathbb{P}$  を用いることで、新たに  $ZFC$  のモデル  $V[\mathbb{P}]$  を構成可能である。新たに作られた  $ZFC$  のモデルを  $\mathbb{P}$  による強制拡大と呼ぶ。

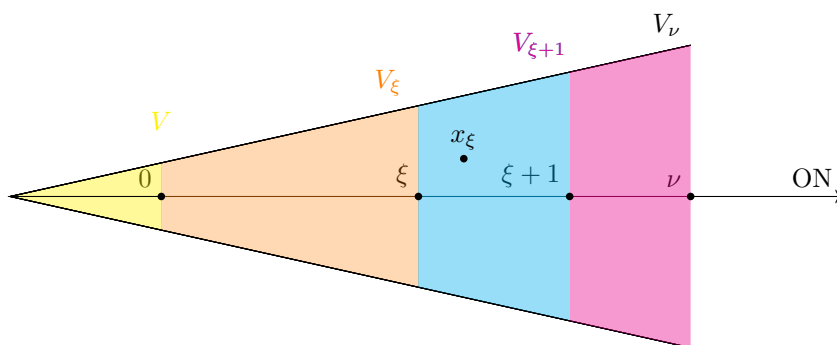
強制拡大する際に、元のモデル  $V$  から新しく追加される集合の中でも強制半順序から自然に書けるものをジェネリック対象 (generic object) と呼ぶ。

このとき、拡大前のモデル  $V$  と拡大後のモデル  $V[\mathbb{P}]$  に対して、 $V$  上で  $\varphi$  が成立するとき、 $V \models \varphi$  とし、 $V[\mathbb{P}]$  上で成り立つとき  $V[\mathbb{P}] \models \varphi$  とかく。<sup>iii</sup> また  $V \models$  については省略されることが基本である。

強制半順序  $\mathbb{P}$  に関連する関係  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  が成立するとき、 $V[\mathbb{P}_\xi] \models \varphi$  が成立し、逆も然りである。<sup>iv</sup>

例として、 $\omega$  から  $\omega$  への関数の有限部分からなる集合  $\text{Fn}(\omega, \omega) = \{g; \exists n \in \omega \exists A \in [\omega]^n \exists f \in \omega^\omega g = f|_A\}$  に対して、 $\supseteq$  という順序構造を持たせた、 $\mathbb{P} = \langle \text{Fn}(\omega, \omega), \supseteq \rangle$  という強制半順序を考える。この強制半順序は強制拡大により、新しいジェネリック対象として  $x \in \omega^\omega$  が追加される。

反復強制法はこの強制拡大を何回にも渡って行う操作であり、大きく分けて FS (finite support) と CS (countable support) の 2 パターンが存在する。反復強制半順序はある固定された順序数  $\nu$  を用いて  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi; \xi \in \nu \rangle$  のような形を持っている。



始めは  $V$  から始まり、 $\xi$  まで進んだ際に得られる拡大モデル  $V_\xi$  に対して、 $\xi + 1$  のステージでは新しいジェネリック対象  $x_\xi$  を加えた  $V_{\xi+1}$  を構成していく。

FS と CS の違いは極限のステージの差であるが、ここでは説明を省く。

特に、FS-反復強制法で強制半順序  $\mathbb{P}$  に対して不可算な基数  $\theta$  を用いて定義される性質  $\theta$ -cc について、各ステージで用いる強制半順序が  $\theta$ -cc であれば、強制半順序  $\mathbb{P}$  も  $\theta$ -cc であると言える。

## IV Book-keeping Argument

**Definition IV.1.** Relational system  $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$  と強制半順序  $\mathbb{P}$  と部分集合  $A \subseteq V$  について、 $\mathbb{P}$  によって追加されるジェネリック対象  $y$  が次を満たすとき  $A$  上の dominating object であるという:

$$\forall x \in X \cap A \ V[\mathbb{P}] \models x \sqsubset y$$

**Theorem IV.2.**  $\mathbf{R}$  を Prs,  $\nu$  を不可算正則基数とする。長さ  $\nu$  の FS-反復強制法  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi; \xi \in \nu \rangle$  とする。次の 2 つの仮定を満たすとき:

<sup>ii</sup> より正確には、ctm  $M \subseteq V$  を取ることにより  $M$  の外でジェネリック対象が存在させる必要がある。

<sup>iii</sup> ここで、論理式  $\varphi$  に現れる変数はすべてそれぞれのモデル  $V$  および  $V[\mathbb{P}]$  からである。

<sup>iv</sup> 正確には  $\mathbb{P}$ -name とその解釈の関係があるがここでは割愛する。

- $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \ulcorner \mathring{Q}_\xi \text{ は cf}(\nu)\text{-cc} \urcorner$ , for each  $\xi \in \nu$ , かつ
- ある  $A \subseteq \nu$  が存在し,  $\cup A = \nu$  かつ任意の  $\xi \in A$  に対して,  $\mathring{Q}_\xi$  は  $\mathbf{R}$ -dominating 対象を追加する.

このとき,  $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbf{R} \preceq_T \nu$  が成立する. 特に,  $\nu \leq \mathfrak{b}(\mathbf{R})$  と  $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \nu$  が成立する.

ここで,  $\nu$  は自然に定まる relational system  $\nu = \langle \nu, \nu, \in \rangle$  である.

この定理において, 反復強制法の長さ  $\mu$  だけ新しいジェネリック対象  $x_\xi$ ,  $\xi \in A$ , が追加されているのが重要な点である. これは, FS-反復強制法において,  $V[\mathbb{P}]$  上の部分集合  $A \subseteq X$  のサイズが  $\mu$  よりも小さいとき, あるステージ  $\xi \in \nu$  が存在して,  $A \in V[\mathbb{P}_\xi]$  であると見れるからである.

逆向きの Tukey connection,  $\mathbf{R} \preceq_T \nu$  を成り立たせるために **Fact V.2** を用いる.

強制半順序  $\mathbb{P}$  のサイズを小さくする方法として, 推移的モデルを取る方法が存在する<sup>v</sup>.

ZFC のモデル  $V$  と  $\mathbf{R}$ -dominating 対象を追加する強制半順序  $\mathbb{P}$  に対して サイズが  $< \theta$  な推移的モデル  $H$  (ZFC のモデル) を取ることで, 次のような性質を持った  $\mathbb{P}^H$  が取れる:

- $\mathbb{P}^H$  は強制半順序であり, サイズは  $< \theta$ , かつ
- $\mathbb{P}^H$  は  $H$ -dominating.

とくに,  $H$  は  $V$  上の任意の集合  $A$  に対して,  $A \in H$  となるようなものが存在する.

しかしながら, 推移的モデルを取ると一般には追加されるジェネリック対象が  $\mathbf{R}$ -dominating である保証はない. そこで用いられるのが book-keeping argument である.

$\mathbf{R}$  の第一成分である  $X$  の濃度が連続体濃度以下であるとする.

Book-keeping argument とは FS-反復強制法  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \mathring{Q}_\xi^{H_\xi}; \xi \in \nu \rangle$  を構成する際の  $H_\xi$  の選び方において持ちこたれる<sup>vi</sup>. ステージ  $\xi \in \nu$  時点で現れる  $x \in H_\xi$  と次のステージで追加されるジェネリック対象  $x_\xi$  には  $x \sqsubset x_\xi$  の関係が成立するとは限らない. これは  $x$  は  $\mathbf{R}$ -dominating over  $H_\xi$  であるからである. そこで,  $\xi$  よりも後のある  $\eta$  のステージで  $x \in H_\eta$  となるように  $H_\eta$  を選択してくる. これは, FS-反復強制法では十分大きいステージ  $\xi$  では連続体濃度が  $\xi$  となり,  $\nu$  に比べて十分小さいため可能なのである.

特に次のような定理がなりたつ.

**Theorem IV.3.**  $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$  を  $|X| \leq \mathfrak{c}$  な Prs,  $\lambda$  を不可算な正則基数, FS-反復強制法  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \mathring{Q}_\xi^{H_\xi}; \xi \in \eta \rangle$  とし,  $\eta^{< \lambda} = \eta$ <sup>vii</sup> と各ステージ  $\xi$  で,  $\mathring{Q}_\xi$  は  $\mathbf{R}$ -dominating object を追加すると仮定する. 加えて, 次のような book-keeping argument が成り立つと仮定する:

- 任意の  $\xi \in \eta$  と  $A \in [X]^{< \lambda} \cap V_\xi$  に対して, ある  $\eta \in \nu$  が存在し,  $\eta > \xi$  かつ  $A \subseteq N_\eta$  を満たす.

このとき,  $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{C}_{[\nu]^{< \lambda}}$ . 特に,  $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) \leq \lambda$  かつ  $\nu \leq \mathfrak{d}(\mathbf{R})$  が成立する.

**Theorem IV.4.**  $\mathbf{R}$  を Prs,  $\nu$  を不可算基数とする. 長さ  $\nu$  の FS-反復強制法  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \mathring{Q}_\xi; \xi \in \nu \rangle$  とする. 次の3つの仮定を満たすとき:

- $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \ulcorner \mathring{Q}_\xi \text{ は cf}(\nu)\text{-cc} \urcorner$ , for each  $\xi \in \nu$ , かつ
- ある  $A \subseteq \nu$  が存在し,  $\cup A = \nu$  かつ任意の  $\xi \in A$  に対して,  $\mathring{Q}_\xi$  は  $\mathbf{R}$ -dominating 対象を追加する,

<sup>v</sup> 推移的であるのは, 強制法の議論で  $\mathbb{P}$ -name を定義するためである.

<sup>vi</sup> 今回は  $H_\xi$  の選択の仕方についてだが, 他にもバリエーションが存在する.

<sup>vii</sup>  $\eta$  は  $\lambda$  に対して十分大きくする必要がある

- 各ステージ  $\xi$  で  $\mathbb{Q}_\xi$  は新しい対象を付け加える自明でない強制半順序.

この時,  $\mathbf{R} \cong_T \text{cf}(\nu)$  が成立する.

## V Goodness Property

**Definition V.1.**  $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$  を Prs,  $\kappa$  を基数とする. 強制半順序  $\mathbb{P}$  が  $\kappa$ - $\mathbf{R}$ -good であるとは, 任意の  $\mathbb{P}$ -name  $\dot{y} \in Y$  に対して, ある部分集合  $H \in [Y]^\kappa \cap V$  が存在して次を満たす.

$$\forall x \in X (\forall y \in H x \not\sqsubset y \implies \Vdash_{\mathbb{P}} x \not\sqsubset \dot{y})$$

とくに,  $\mathbb{P}$  が  $\aleph_1$ - $\mathbf{R}$ -good であるときは, 単に  $\mathbf{R}$ -good と呼ぶ.

具体例に関しては [Theorem V.4](#) に上がっている.

**Fact V.2.**  $\theta$  が不可算正則基数であり, 強制半順序  $\mathbb{P}$  のサイズが  $< \theta$  であるとき,  $\mathbb{P}$  は  $\theta$ - $\mathbf{R}$ -good である. ここで, relational system  $R$  は適当な Prs である.

**Theorem V.3.**  $\theta$  を不可算正則基数とする. FS-反復強制半順序  $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\xi, \mathring{\mathbb{Q}}_\xi; \xi \in \nu \rangle$  に対して,  $\nu \geq \theta$  かつ

$$\forall \xi \in \nu \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \text{「}\mathring{\mathbb{Q}}_\xi \text{ は } \theta\text{-cc かつ } \theta\text{-}\mathbf{R}\text{-good である」}$$

ならば,  $V[\mathbb{P}] \models \mathbf{C}_{[\nu]^{<\theta}} \preceq_T \mathbf{R}$ . 特に,  $\theta \leq \mathfrak{b}(\mathbf{R})$  と  $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \nu$  が成立する.

**Theorem V.4.** 次のような強制半順序に対して, 新しく追加する実数と goodness の性質について次が成り立つ.

1.  $\mathbb{E}$ : Eventually different 強制法
  - (a)  $\mathbb{E}$  は  $\mathbf{C}_{\mathcal{M}}$ -dominating 実数を追加する.
  - (b)  $\mathbb{E}$  は  $\mathbf{Cn}$  と  $\mathbf{Lc}^*$ ,  $\omega^\omega$  に関して good である.
2.  $\mathbb{B}$ : Rondon 強制法
  - (a)  $\mathbb{B}$  は  $\mathbf{C}_{\mathcal{N}}$ -dominating 実数を追加する,
  - (b)  $\mathbb{B}$  は  $\omega^\omega$  に関して good である.
3.  $\mathbb{D}$ : Hechler 強制法:
  - (a)  $\mathbb{D}$  は  $\omega^\omega$ -dominating 実数を追加する,
  - (b)  $\mathbb{D}$  は  $\mathbf{Cn}$  と  $\mathbf{Lc}^*$  に関して good である.
4. LOC: Localization 強制法
  - (a) LOC は  $\mathcal{N}$ -dominating 実数を追加する,

## VI Cichoń's diagram の左側の分離

次の定理が本稿の主定理である:

**Theorem VI.1.** 4つの正則基数  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$  と  $\lambda_5^{<\lambda_3} = \lambda_5$  とする. このとき, 強制半順序  $\mathbb{P}$  が存在し,  $V[\mathbb{P}]$  上で次が成立する:



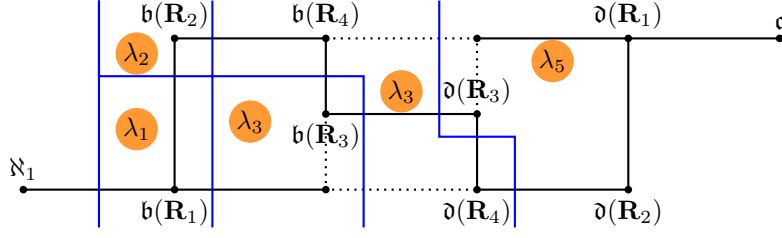


表1 Cichoń's diagram の左側の部分的分離

1.  $\mathcal{N} \cong_T \mathbf{C}_{[\lambda_5]^{\lambda_1}}$ ,
2.  $\mathbf{C}_{\mathcal{N}} \cong_T \mathbf{C}_{[\lambda_5]^{\lambda_2}}$ ,
3.  $\omega^\omega \cong_T \mathbf{C}_{[\lambda_5]^{\lambda_3}}$ ,
4.  $\mathbf{C}_{\mathcal{M}} \cong_T \mathbf{C}_{[\lambda_4]^{\lambda_4}}$ ,

この定理により, Cichoń's diagram の左側を部分的に分離可能である:

*Proof.* 順序数  $\nu$  を次のようにとる<sup>viii</sup>:

- $\text{cf}(\mu) = \lambda_4$ ,
- 4つの集合  $C_0, C_1, C_2, C_3$  が存在し, 各要素が  $|C_i| = \lambda_5$  かつ  $\nu = \cup\{C_i; i \in 5\}$  を満たす.

FS-反復強制半順序  $\mathbb{P} = \langle P_\xi, \mathbb{Q}_\xi^{H_\xi}; \xi \in \nu \rangle$  を次のように定義する.

$$\mathbb{Q}_\xi := \begin{cases} \mathbb{E} & \text{if } \varepsilon \in C_0, \\ \text{LOC}^{N_\xi} & \text{if } \varepsilon \in C_1, \\ \mathbb{B}^{N_\xi} & \text{if } \varepsilon \in C_2, \\ \mathbb{D}^{N_\xi} & \text{if } \varepsilon \in C_3, \text{ and} \end{cases}$$

さらに, book-keeping argument により各  $i$  に関して次を満たすように  $N_\xi$  を選択する:

- A.  $\xi \in C_i, i = 1, 2, 3$ , に対して,  $N_\xi$  のサイズは  $< \lambda_i$ , である.
- B. 任意の  $\xi \in \nu$  と  $A \in [\omega]^{< \lambda_1} \cap V_\xi$  に対して, ある  $\eta \in C_1$  が存在し  $\xi < \eta$  と  $A \subseteq N_\eta$  を満たす,
- C. 任意の  $\xi \in \nu$  と  $A \in [\Omega]^{< \lambda_2} \cap V_\xi$  に対して, ある  $\eta \in C_2$  が存在し  $\xi < \eta$  と  $A \subseteq N_\eta$  を満たす,
- D. 任意の  $\xi \in \nu$  と  $A \in [\omega]^{< \lambda_3} \cap V_\xi$  に対して, ある  $\eta \in C_3$  が存在し  $\xi < \eta$  と  $A \subseteq N_\eta$  を満たす.

このとき,  $i = 1, 2, 3$  について, 各ステージで  $\mathbb{Q}_\xi$  は  $\lambda_i$ - $\mathbf{R}_i$ -good となる. よって, **Theorem V.3** から  $V[\mathbb{P}]$  上では  $\mathbf{C}_{[\nu]^{< \lambda_i}} \preceq_T \mathbf{R}_i$  が成立する. 一方で, book-keeping argument により,  $\mathbf{R}_i \preceq_T \mathbf{C}_{[\nu]^{< \lambda_i}}$  が成立する. (see. **Theorem IV.3**)

$i = 4$  に関しては, **Theorem IV.4** より,  $\mathbf{R}_4 \cong_T \text{cf}(\nu) = \lambda_4$  □

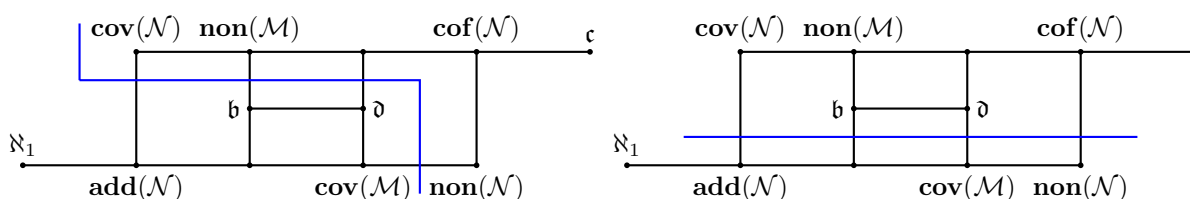
この定理のよって, Cichoń's diagram の左側の分離がほとんど完了したが, **Table 1** における,  $\mathbf{b}(\mathbf{R}_4)$  と  $\mathfrak{d}(\mathbf{R}_4)$  の分離がまだ完了していない. ここを分離するにはさらに, fam-limit という概念を導入する必要があるが, 既に分離は完了している ([GKS19]). そして, 左側だけではなく右側も分離も完了している. [GKS19] では巨大基数を仮定した証明となっているが, これは内部モデルを用いることで, 巨大基数の仮定を除いて証

<sup>viii</sup>  $\nu = \lambda_4 \cdot \lambda_5$  (順序数の乗法) などがあるが説明が面倒なので割愛する.

明がされることがのちに確認された ([GKMS22]). いずれも, Tukey connection の保存および追加を操作することで左側の分離も可能のしている.

## VII あとがき

Cichoń's diagram にはこれ以上の矢印が ZFC 上では存在しない. さらに, 下図のように ( $\text{add}(\mathcal{N})$  と  $\text{cof}(\mathcal{M})$  の値に注意すれば) 2 つの値のそれぞれ分けることが可能であり, これは 23 すべてのパターン<sup>ix</sup>が確認されている ([BJ95]).



一方で, 8 つの基数を同時に分離する方法が 1 パターンは存在することは知られているが, 他の大小の順番のパターンでも分離が可能であるかは不明である.

また, Cichoń's diagram に現れる基数以外の基数を加えることができるのか? そして, それを加えても同時に分離が可能であるのかという問題が存在する ([GKMS21],[Yam24]).

更に詳しい Cichoń's maximum の話は [CM22] や [Mej24] を参考にするとよい<sup>x</sup>. また, 基数や強制法の話に関しては, [Kun11] や [Jec03] を参考にするとよいだろう.

## 参考文献

- [BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995. On the structure of the real line.
- [CM22] Miguel A. Cardona and Diego A. Mejía. Forcing constellations of Cichoń's diagram by using the Tukey order. *Kyōto Daigaku Sūrikaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku*, 2213:14–47, 2022. [arXiv:2203.00615](#).
- [GKMS21] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah. Controlling cardinal characteristics without adding reals. *Journal of Mathematical Logic*, 21(03):2150018, 2021.
- [GKMS22] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah. Cichoń's maximum without large cardinals. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 24(11):3951–3967, 2022.
- [GKS19] Martin Goldstern, Jakob Kellner, and Saharon Shelah. Cichoń's maximum. *Annals of Mathematics*, 190(1), July 2019.
- [Jec03] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, millennium edition, 2003.

<sup>ix</sup> この数は無限組み合わせ論の中では珍しく有限組合せである.

<sup>x</sup> 近日関連する書籍もでるといふ噂がある.

- [Kun11] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 34 of *Studies in Logic (London)*. College Publications, London, 2011.
- [Mej24] Diego A. Mejía. Forcing techniques for cichoń's maximum: Lecture notes for the mini-course at the university of vienna, 2024.
- [Yam24] Takashi Yamazoe. Cichoń's maximum with evasion number, 2024.